512.7
Ar6u

Arndt, Johannes G. A.

Über die darstellung ganzer Zahlen als Summen von Sieben Kuben

THE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF ILLINOIS

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sieben Kuben.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Georg August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Johannes G. A. Arndt
aus Bloemfontein, Südafrika.

Göttingen 1925.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät.

Tag der mündlichen Prüfung: 4. November 1925.

Referent: Prof. Dr. E. Landau.

S 12.0 K / Math.
Ar 6u

Meinen lieben Eltern.

60553

§ 1. Einleitung.

Die von Waring aufgestellte Behauptung[1]), daß es zu jedem ganzen $k \geqq 1$ ein ganzes $s = s(k)$ gibt derart, daß für alle ganzen $n \geqq 1$ die diophantische Gleichung

$$n = \sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^k, \qquad x_\nu \geqq 0, \tag{1}$$

lösbar ist, wurde allgemein zuerst von Herrn Hilbert[2]) bewiesen. Man kann also drei Zahlen $g(k)$, $G(k)$ und $G_1(k)$ folgendermaßen definieren: $g(k)$ sei die kleinste Zahl s, für welche (1) für alle $n \geqq 1$ lösbar ist. $G(k)$ sei die kleinste Zahl s, zu der es ein $n_0 = n_0(s, k)$ gibt, derart, daß (1) für alle $n \geqq n_0$ lösbar ist. $G_1(k)$ sei die kleinste Zahl s, so daß die Anzahl der n des Intervalles $1 \leqq n \leqq x$, für welche (1) nicht lösbar ist, $o(x)$ ist.

Es gilt offenbar $G_1(k) \leqq G(k) \leqq g(k)$. Zu einer vollständigen Lösung des Waringschen Problems gehört die Bestimmung dieser drei Zahlen für jedes k.

Was bis 1920 in dieser Richtung an Einzelergebnissen auf verschiedenen Wegen erreicht wurde, läßt sich heute — mit wenigen Ausnahmen — gleichzeitig durch die neue analytische Methode der Herren Hardy und Littlewood[3]) erledigen. Diese

1) Zur Geschichte des Problems vgl. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, II (1920), S. 717/725. Ferner *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, II, C 8, S. 829/832. Literaturangaben bei Kempner, *Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen*, Dissertation, Göttingen 1912.

2) *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsches Problem)*, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1909, S. 17/36.

3) Vgl. die Abhandlungen: *„Partitio Numerorum“* (I): *A new solution of Waring's Problem* (kurz P. N. 1), Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1920, S. 33/54.

P. N. 2: *Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates*, Mathematische Zeitschrift, **9** (1921), S. 14/27.

P. N. 4: *The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$*, Mathematische Zeitschrift, **12** (1922), S. 161/188.

P. N. 6: *Further Researches in Waring's Problem*, Mathematische Zeitschrift, **23** (1925), S. 1/37.

Vgl. ferner: Landau, *Zum Waringschen Problem*, Mathematische Zeitschrift, **12** (1922), S. 219/247.

liefert nicht nur einen neuen Existenzbeweis für $G(k)$ und damit für $G_1(k)$ und $g(k)$, sondern gibt für $G(k)$ und $G_1(k)$ obere und untere Schranken an, die für $k \geqq 4$ alles frühere weit übertreffen[4]).

Eine wichtige Ausnahme bildet jedoch der Fall $k = 3$, der nächstliegende nach dem vollständig erledigten Fall $k = 2$. Hier liefert die neue Methode $G(3) \leqq 9$, während schon zuvor bekannt war, daß $g(3) = 9$[5]), und Herr Landau[6]) 1909 durch den Beweis von $G(3) \leqq 8$ zugleich zeigte, daß $G(k)$ und $g(k)$ nicht identisch zu sein brauchen. Die besten für $G(3)$ bekannten Schranken sind

$$4 \leqq G(3) \leqq 8\ ^{7}).$$

Man kann nun versuchen, der Frage, ob 8 die richtige obere Schranke ist oder nicht, dadurch näher zu kommen, daß man Restklassen nach einem geeigneten Modul auf ihrer Darstellbarkeit durch höchstens sieben positive Kuben untersucht. So bewies Herr Baer[8]), daß sich alle großen Multipla von 16, 27 und von 36 als Summen von sieben nicht-negativen Kuben darstellen lassen, oder, wie wir kurz sagen wollen, K_7[9]) sind. Das Hauptergebnis seiner Untersuchungen ist[10]), daß von einer Stelle an alle Zahlen, welche gewissen 78 Restklassen modulo 432 angehören, K_7 sind.

Ist $B_7(m)$ die Anzahl der Restklassen nach einem Modul $m \geqq 1$, deren Glieder von einer Stelle an ausnahmslos K_7 sind, und bezeichnen wir die obere Grenze von $\frac{B_7(m)}{m}$ mit A_7, so läßt sich das eben genannte Ergebnis von Herrn Baer in der Form

$$A_7 \geqq \frac{78}{432} > 0{,}18055$$

aussprechen.

Diese Ergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit verbessert. In § 4 wird bewiesen, daß sogar die großen Multipla von 8 und von 9 stets K_7 sind, und ferner, daß

$$A_7 \geqq \frac{249}{864} > 0{,}28819.$$

---

4) Vgl. die Tabellen P. N. 4, S. 163 und P. N. 6, S. 6.

5) Vgl. hierzu Kempner, a. a. O. S. 24/34.

6) Mathematische Annalen, **66** (1909), S. 102/105.

7) Wegen der unteren Schranke vgl. Kempner, a. a. O. S. 36/39 oder P. N. 4, S. 164.

8) *Beiträge zum Waringschen Problem,* Dissertation, Göttingen 1913, S. 31/41.

9) Wenn die Gleichung (1) für $k = 3$ und $s = \lambda$ lösbar ist, wollen wir dieses durch „n ist K_λ“ oder „$n = K_\lambda$“ andeuten.

10) A. a. O. S. 40/41.

Bezeichnet man mit $C_\lambda(x)$ die Anzahl der ganzen n der Strecke $1 \leqq n \leqq x$, welche K_λ sind, so hat Herr Baer a fortiori bewiesen, daß

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{C_7(x)}{x} > 0{,}18055.$$

Eine Arbeit von Herrn Post[11]) stellt sich zum Ziel, diese untere Schranke zu erhöhen, indem darauf verzichtet wird, Restklassen nach einem Modul m anzugeben, deren Glieder von einer Stelle an ausnahmslos K_7 sind. Als Ergebnis wird angegeben[12])

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{C_7(x)}{x} \geqq 0{,}4258,$$

was jedoch dort nicht bewiesen wird; vielmehr ist zu dem Wege, auf welchem Herr Post zu seinem Ergebnis gelangt, folgendes zu bemerken:

I) Es fehlt, wie Herr Post selbst ausdrücklich bemerkt[13]), ein Beweis von Hilfssatz IV in § 4.

II) Asymptotische Werte werden an Stelle genauer Werte ohne Fehlerabschätzung eingesetzt. So werden die in § 4, Hilfssatz V abgeleiteten asymptotischen Werte für $A = A(U, X')$ auf S. 18, 20, 22, 26, 27, 28, 29 ohne weiteres eingesetzt und ohne zu untersuchen, ob A auch etwa gleichmäßig in X' gegen den Grenzwert strebt.

III) Das Ergebnis von § 6 (vgl. insbesondere S. 23/24) beruht auf einem Fehlschluß.

Ist $0 < a < b$; $p_0, p_1, p_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Primzahlen; ist ferner für $\nu \geqq 1$

$$a p_\nu^3 \leqq b p_{\nu-1}^3 < a p_{\nu+1}^3 \leqq b p_\nu^3$$

und bedeutet $D(x)$ die Anzahl der ungeraden n der Strecke $1 \leqq n \leqq x$, welche K_7 sind, so braucht aus

$$\frac{D(b p_\nu^3) - D(a p_\nu^3)}{b p_\nu^3 - a p_\nu^3} \geqq c, \qquad \nu \geqq 0,$$

wo c eine absolute Konstante ist, noch nicht zu folgen, daß

---

11) *Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sieben Kuben*, Dissertation, Halle 1920.

12) A. a. O. S. 6. Das dort verwendete Zeichen $\lim_{x=\infty}$ ist offenbar durch $\liminf_{x \to \infty}$ zu ersetzen.

13) A. a. O. S. 10.

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{D(x)}{x} \geqq c.$$

Entsprechendes gilt für die Schlußfolgerungen von § 7, 8 und 9.

IV) In § 7 (S. 25) enthalten die Gleichungen (2), (3), (4) je einen Widerspruch, indem

$$h \equiv 2(2k+1) \equiv 2 \pmod 4,$$

aber

$$4g_1 + 2 + 58p^3 \equiv 0 \pmod 4,$$
$$4g_2 + 2 + 34p^3 \equiv 0 \pmod 4,$$
$$4g_3 + 2 + 6p^3 \equiv 0 \pmod 4.$$

Die Zerlegungen müssen offenbar heißen

$$h = 2(2k+1) = 4g_1 + 58p^3,$$
$$h = 2(2k+1) = 4g_2 + 34p^3,$$
$$h = 2(2k+1) = 4g_3 + 6p^3.$$

Wird aber nun a_ν bestimmt, so daß

$$4g_\nu = a_\nu^3 + 6pX_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

so muß a_ν und folglich X_ν gerade sein. Dann durchläuft aber X_ν nicht länger konsekutive Zahlen, wie es § 4, Hilfssatz V fordert.

V) In § 8, Gleichungen (8), (18) und (26) folgt aus

$$2g_\nu + 1 = 2a_\nu^3 + 3pX_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

daß X_ν ungerade ist, weshalb § 4, Hilfssatz V wiederum nicht anwendbar ist.

VI) In § 9 muß das Ausgangsintervall offenbar

$$(384 + 1280 - 8)p^3 < h < (384 + 1280)p^3$$

heißen.

Bei Verwendung der nötigen Sorgfalt mag sich der neue Gedanke von Herrn Post als brauchbar erweisen; doch sind derartige Untersuchungen überflüssig geworden, seitdem die Herren Hardy und Littlewood neuerdings bewiesen haben[14])

$$\lim_{x \to \infty} \frac{C_5(x)}{x} = 1,$$

woraus folgt, daß $G_1(3)$ den Wert 4 oder 5 hat. Aus dem Beweise dieser interessanten Tatsache ergibt sich aber nichts Neues über $G(3)$; es folgt noch nicht einmal, daß es Restklassen nach einem Modul m gibt, die von einer Stelle an stets K_7 sind. Es ist daher

14) P. N. 6, S. 3, Theorem 2.

noch immer von Wert, unsere Kenntnis über Restklassen, welche zuletzt ausnahmslos K_7 sind, zu erweitern.

Herr Post bewies in seiner Arbeit ferner den Satz[15]: *Von einer bestimmten Stelle an sind alle die geraden Zahlen, die durch das Quadrat irgend einer bestimmten Primzahl $t \geqq 7$ teilbar sind, in sieben nicht-negative Kuben zerlegbar.*

Diesen Satz verschärfen wir in zwei Richtungen, indem wir das eine Mal $2t^2 \mid N$, $t \geqq 2$, das andere Mal $t^2 \mid N$, $t \geqq 3$ voraussetzen. Hierbei braucht t nicht mehr Primzahl zu sein, aber in beiden Fällen ist (wie bei Herrn Post, der dies jedoch nicht bemerkt) die Stelle, von der an die Zerlegbarkeit bewiesen ist, von t abhängig.

Zum Beweise dieser und der bereits erwähnten andern Ergebnisse schicken wir in § 3 einige neue Sätze über bisher unbenutzte[16] ternäre quadratische Formen voraus. Dort wird auch der oben erwähnte[13], von Herrn Post vermutete Hilfssatz IV bewiesen.

Die Methode, nach welcher in § 4 gewisse Zahlen in sieben nicht-negative Kuben zerlegt werden, ist im wesentlichen die von Herrn Baer und soll hier kurz beschrieben werden.

Man versucht, die Zahl N auf die Gestalt

$$N = b^3 + Cq^3 + 6qX \tag{2}$$

zu bringen, wo $b \geqq 0$ ganz und $q \geqq 1$ ganz,

$$0 < c_1 \leqq c_2 \leqq c_3, \qquad C = 2(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3) \tag{3}$$

und X mit ganzzahligen x_ν als

$$X = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 \tag{4}$$

darstellbar ist.

Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} N = {} & b^3 + (c_1 q + x_1)^3 + (c_2 q + x_2)^3 + (c_3 q + x_3)^3 \\ & + (c_1 q - x_1)^3 + (c_2 q - x_2)^3 + (c_3 q - x_3)^3, \end{aligned} \tag{5}$$

und es wird $N = K_7$ sein, falls keines der letzten sechs Glieder negativ ist. Dies wird nach (4) und (3) gewiß dann der Fall sein, wenn

$$0 \leqq X \leqq c_1^3 q^2. \tag{6}$$

---

15) S. 13/15.

16) Bei Formen, über welche in der Literatur Angaben zu finden sind, wird dies bemerkt.

Ein Mangel der Zerlegung (5) ist, daß sie von solch spezieller Art ist, insofern als im Falle $N = K_7$ a priori kein Grund zur Annahme besteht, daß es bei gegebenen c_1, c_2, c_3 eine Zerlegung gibt, in welcher drei Paare von Gliedern die Eigenschaft besitzen, daß die Summen der Basen durch $2c_1$, $2c_2$ bzw. $2c_3$ teilbar sind. Es scheint also wünschenswert, dies zum mindesten dadurch auszugleichen, daß man möglichst viele verschiedene Formen $c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2$ benutzt.

Um bei festen c_1, c_2, c_3 zur Darstellung (2) zu gelangen, bestimmt man die positiven ganzen Zahlen r und q so, daß

$$r \mid N - Cq^3$$

und

$$r \mid 6q.$$

Nun wird die positive ganze Zahl s so klein wie möglich gewählt, so daß

$$rs = t^3,$$

und man sucht die Kongruenz in a zu lösen

$$n \equiv sa^3 \left(\text{mod. } \frac{6q}{r}\right), \qquad 0 \leqq a < \frac{6q}{r},$$

wo

$$n = \frac{N - Cq^3}{r}.$$

Im Falle der Lösbarkeit ist

$$N = (ta)^3 + Cq^3 + 6qX,$$

wo X jedenfalls ganz ist. Nun darf aber X nicht negativ sein, und da man im voraus nicht weiß, wie groß das zu N gehörige a ist, sucht man zu erreichen

$$n \geqq s\left(\frac{6q}{r}\right)^3,$$

also

$$N - Cq^3 \geqq t^3\left(\frac{6q}{r}\right)^3. \tag{7}$$

Soll aber auch (6) unter allen Umständen erfüllt sein, so muß sein

$$N - Cq^3 \leqq 6q \cdot c_1^3 q^3. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt aber

$$\left(\frac{6t}{r}\right)^3 \leqq 6c_1^3$$

oder

$$36t^3 \leqq (rc_1)^3,$$

und in der Erfüllung dieser Ungleichung liegt eine der Hauptschwierigkeiten der Methode. Man sieht insbesondere, daß für $r = 1$, also $t = 1$, $c_1 \geqq 4$ sein muß, und die Darstellung einer Zahl durch eine solche Form ist sehr fraglich. Es ist klar, daß man bestrebt sein wird, Formen mit möglichst großem c_1 zu benutzen, damit r nicht zu groß wird, wodurch die in Frage kommenden N eingeschränkt werden. Herr Baer und Herr Post verwendeten beide nur Formen mit $c_1 = 1$. Im folgenden werden die meisten neuen Ergebnisse mit $c_1 = 2$ oder 3 erreicht.

§ 2. Über die Reduktion positiver ternärer quadratischer Formen [17]).

Die ternäre quadratische Form $\begin{Bmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{Bmatrix}$, das heißt

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2a'x_2x_3 + 2b'x_3x_1 + 2c'x_1x_2$$

sei positiv definit. Als ihre Diskriminante bezeichnen wir die Zahl

$$D = \begin{vmatrix} a & c' & b' \\ c' & b & a' \\ b' & a' & c \end{vmatrix}.$$

Hinreichende Bedingungen dafür, daß f positiv definit sei, sind bekanntlich [18])

---

17) Wegen Literatur auf diesem Gebiet vgl. Dickson, *History of the Theory of Numbers,* III (1923), S. 206/224.

Das Problem der Reduktion wird ausführlich behandelt in: Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen, Zweite Abteilung* (1923).

18) Vgl. z. B. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* I (1909), S. 544/545.

In einer Abhandlung von Dirichlet (auf die wir in § 3 zurückkommen): *Über die Zerlegbarkeit der Zahlen in drei Quadrate,* Crelles Journal, **40** (1850), S. 228; Werke II (1897), S. 92; desgl. in der französischen Übersetzung von Hoüel: Journal de Mathématiques, Ser. 2, **4**, S. 234 steht übrigens irrtümlicherweise, die Bedingungen (in unserer Bezeichnungsweise) $a > 0$, $\Delta > 0$ und $D = 1$ seien hinreichend, was auch später benutzt wird: S. 229 Z. 16, S. 93 Z. 5 bzw. S. 235 Z. 10. Ein Gegenbeispiel ist die Form $\begin{Bmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}$.

Dieselbe Lücke findet sich in dem dort behandelten Fall $D = 3$.

$$b > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} b & a' \\ a' & c \end{vmatrix} > 0, \quad D = \begin{vmatrix} a & c' & b' \\ c' & b & a' \\ b' & a' & c \end{vmatrix} > 0.$$

Im folgenden wird nur von Formen mit ganzzahligen Koeffizienten die Rede sein. Zwei Formen heißen äquivalent, wenn es eine ganzzahlige lineare Transformation der Determinante ± 1 gibt, welche die erste in die zweite überführt. Bekanntlich zerfallen sämtliche Formen gegebener Diskriminante D in eine endliche Anzahl $h(D)$ von verschiedenen Klassen[19]). Formen derselben Klasse stellen offenbar dieselben Zahlen dar. Wenn es sich nur um die Darstellbarkeit ganzer Zahlen handelt, genügt es demnach, aus jeder Klasse eine Form als Repräsentanten zu isolieren. Für den vorliegenden Zweck ist eine Bestimmung der Klassenzahl $h(D)$ und die Isolierung genau einer Form jeder Klasse[20]) nicht notwendig, vielmehr genügt der folgende Satz:

Jede positiv definite Form der Diskriminante D ist einer Form $\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{matrix}\right\}$ *äquivalent, welche den Bedingungen genügt:*

$$abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 = D,$$

$$a \leqq \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{D},$$

$$a \leqq b,$$

$$2|b'| \leqq a,$$

$$2|c'| \leqq a,$$

$$C \leqq 2\sqrt{\frac{aD}{3}},$$

$$2|A'| \leqq C \leqq B,$$

19) Vgl. z. B. Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen, Erste Abtheilung* (1898), S. 44/47; oder auch Landau an der soeben zitierten Stelle S. 548. Daß dort der Begriff der Äquivalenz nur für Transformationen der Determinante $+1$ definiert ist, schadet nichts.

20) Dieses erreicht z. B. die Seebersche Reduktion. Vgl. etwa Dirichlet: *Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen,* Crelles Journal, **40** (1850), S. 209/227; Werke II (1897), S. 27/48; Journal de Mathématiques, Ser. 2, **4**, S. 209/232. Ferner: Eisenstein, *Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen ...*, Crelles Journal, **41** (1851), S. 141/190, wo Tabellen der reduzierten Formen bis $D = 100$ angegeben sind. Siehe auch: Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen* II, S. 192/196.

wo

$$A' = aa' - b'c',$$
$$C = ab - c'^2,$$
$$B = ac - b'^2.$$

Der Inhalt dieses Satzes findet sich bei Herrn Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, I (1909), S. 545, wenn die Bemerkung auf der letzten Zeile von S. 547 hinzugenommen wird.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, ohne allzu große Mühe, Repräsentantensysteme für $D = 3, 5, 6, 9, 10, 12$ und 18 aufstellen. Die unten angegebenen Systeme wurden auf diesem Wege gewonnen; sie stimmen mit den Seeberschen reduzierten Formen überein, wie sie in den Eisensteinschen Tabellen[20]) angegeben sind. Nach jeder Form sind Zahlklassen angegeben, welche die Form gewiß nicht darstellen kann. Diese Ausnahmen sind für § 3 wichtig.

$D = 3.$

Es ist $h(3) = 2$.

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

Es kann niemals eine durch φ_1 dargestellte Zahl die Gestalt $9^\sigma(9k+6)$ haben.

$$\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Wegen

$$2\varphi_2 = 2x_1^2 + (2x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2$$

ist stets

$$2\varphi_2 \not\equiv 10 \pmod{16},$$
$$\varphi_2 \not\equiv 5 \pmod{8}.$$

$D = 5.$

Es ist $h(5) = 2$.

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2.$$

Wegen $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ ist stets $\varphi_1 \not\equiv 3 \pmod{8}$ und folglich $\varphi_1 \neq 4^\sigma(8k+3)$.

$$\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Wenn bei ganzzahligen y_ν und m

$$5m = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2,$$

so ist $5 \mid y_1$, $5 \mid y_2$ und

$$m \not\equiv 2, 3 \pmod 5.$$

Wegen

$$2\varphi_2 = (2x_3 - x_3)^2 + 2x_1^2 + 5x_3^2$$

ist daher stets

$$2\varphi_2 \not\equiv 10, 15 \pmod{25},$$
$$\varphi_2 \not\equiv 5, 20 \pmod{25}.$$

$D = 6.$

Es ist $h(6) = 3$.

$$\underline{\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2.}$$

Es ist stets $\varphi_1 \neq 9^\sigma(9k+3)$.

$$\underline{\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2.}$$

Wegen $x^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$ ist stets $\varphi_2 \not\equiv 10 \pmod{16}$.

$$\underline{\varphi_3 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2.}$$

Diese Form stellt offenbar nur gerade Zahlen dar.

$D = 9.$

Es ist $h(9) = 4$.

$$\underline{\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2.}$$

Wegen $\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + (3x_3)^2$ ist stets $\varphi_1 \not\equiv 7 \pmod 8$.

$$\underline{\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3.}$$

Wegen $2\varphi_2 = (2x_2 - x_3)^2 + (3x_3)^2 + 2x_1^2$ ist jedenfalls

$$2\varphi_2 \not\equiv 14 \pmod{16},$$
$$\varphi_2 \not\equiv 7 \pmod 8.$$

$$\underline{\varphi_3 = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2.}$$

$$\varphi_3 \neq 9^\sigma(3k+2).$$

$$\underline{\varphi_4 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2.}$$

Aus $2\varphi_4 = (2x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2$ folgt

$$2\varphi_4 \not\equiv 2 \pmod 3,$$
$$\varphi_4 \not\equiv 1 \pmod 3.$$

$D = 10.$

Es ist $h(10) = 4.$

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2.$$

Wie leicht ersichtlich, ist stets $\varphi_1 \not\equiv 6 \pmod{16}$.

$$\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2.$$

Es ist $\varphi_2 \not\equiv 25^\sigma(25k + 10,\ 15)$, denn aus

$$5m = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$$

folgt $5 \mid x_1, \quad 5 \mid x_2.$

$$\varphi_3 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_3x_1.$$

$$2\varphi_3 = (2x_1 - x_3)^2 + (2x_2)^2 + 5x_3^2,$$

also $2\varphi_3 \not\equiv 4^\sigma\ (8k + 3),$

$$\varphi_3 \not\equiv 4^\sigma(16k + 6).$$

$$\varphi_4 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2.$$

Diese Form stellt keine ungeraden Zahlen dar.

$D = 12.$

Es ist $h(12) = 8.$

$$\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 12x_3^2.$$

$$\varphi_1 \not\equiv 3 \pmod{4}.$$

$$\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2.$$

$$\varphi_2 \not\equiv 5 \pmod{8}.$$

$$\varphi_3 = x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_3^2.$$

$$\varphi_3 \not\equiv 2 \pmod{4}.$$

$$\varphi_4 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3.$$

$$\varphi_4 \not\equiv 3 \pmod{4}.$$

$$\varphi_5 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

$$\varphi_5 \not\equiv 1 \pmod{8}.$$

$$\varphi_6 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + 2x_1x_2.$$

Es ist $3\varphi_6 = (3x_3 + x_2 + x_1)^2 + 4(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - 2x_2)^2,$

also $$3\varphi_6 \not\equiv 3 \pmod 4,$$
$$\varphi_6 \not\equiv 1 \pmod 4.$$

$$\underline{\varphi_7 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1.}$$

$$\varphi_7 \not\equiv 1 \pmod 2.$$

$$\underline{\varphi_8 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2.}$$

$$\varphi_8 \not\equiv 1 \pmod 2.$$

$D = 18.$

Es ist $h(18) = 7.$

$$\underline{\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 18x_3^2.}$$

Wegen $\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + 2(3x_3)^2$ ist stets $\varphi_1 \not\equiv 14 \pmod{16}.$

$$\underline{\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2.}$$

Wegen $\varphi_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + (3x_3)^2$ ist stets $\varphi_2 \not\equiv 14 \pmod{16}.$

$$\underline{\varphi_3 = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2.}$$

Es ist stets $\varphi_3 \not\equiv 2 \pmod 3.$

$$\underline{\varphi_4 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_3x_1.}$$

Wegen $2\varphi_4 = (2x_1 - x_3)^2 + (2x_2)^2 + (3x_3)^2$ ist

$$2\varphi_4 \neq 4^\sigma(8k+7),$$
$$\varphi_4 \neq 4^\sigma(16k+14).$$

$$\underline{\varphi_5 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2.}$$

$$\varphi_5 \neq 9^\sigma(3k+1).$$

$$\underline{\varphi_6 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2.}$$

Wegen $4\varphi_6 = 2(2x_1 - x_2)^2 + (4x_3 - x_2)^2 + (3x_2)^2$ ist

$$4\varphi_6 \neq 4^\sigma(16k+14),$$
$$\varphi_6 \neq 4^\sigma(16k+14).$$

$$\underline{\varphi_7 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2.}$$

$$\varphi_7 \not\equiv 1 \pmod 2.$$

---

§ 3. Über die Darstellung ganzer Zahlen durch positive ternäre Formen.

Zur Beantwortung der Frage, welche Zahlen eine gegebene positive ternäre quadratische Form darstellt, nützt einem die weitausgebaute Theorie der Arithmetik der quadratischen Formen nur wenig; dieser ist es mehr um die Anzahl der etwa vorhandenen Darstellungen einer gegebenen Zahl zu tun. Handelt es sich um eigentliche Darstellbarkeit und kommt es nicht auf die Anzahl der Darstellungen an, so kann man sich, unter Umständen, mit Vorteil einer von Dirichlet[21]) herrührenden Methode bedienen.

Zu der vorliegenden Zahl n, deren eigentliche Darstellbarkeit durch die positiv definite Form f der Diskriminante D nachgewiesen werden soll, sucht man eine positiv definite Form $g = \begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ zu bestimmen, deren Diskriminante

$$n(bc - a'^2) - b = n\Delta - b$$

ebenfalls den Wert D hat. Sie muß also mindestens einer der reduzierten Formen für D äquivalent sein. Unter den Zahlen, welche durch g eigentlich darstellbar sind, befinden sich

$$g(1, 0, 0) = n,$$
$$g(0, 1, 0) = b,$$
$$g(1, 1, 0) = n + b.$$

Wenn nun jede von f verschiedene Klasse mindestens eine dieser Zahlen nicht darstellen kann, so bleibt nur $g \sim f$ übrig, und n ist durch f eigentlich darstellbar.

Die Methode ist vielfach anwendbar, wenn in jeder von f verschiedenen Klasse eine Restklasse nach irgendeinem Modul vollständig fehlt, die aber bei f vorhanden ist. Schwierigkeiten treten dann ein, wenn diese Restklasse auch bei f fehlt.

---

21) Crelles Journal, **40** (1850), S. 228/232; Werke II (1897), S. 89/96; französische Übersetzung von Houël, Journal de Mathématiques Ser. 2, **4**, S. 233/240. Vgl. aber Fußnote 18).

Auf diesem Wege bewies Dirichlet[22]), daß jede positive ganze Zahl, welche von $4k$ und $8k+7$ verschieden ist, durch $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ eigentlich darstellbar ist; ebenso, daß jede zu 3 teilerfremde positive ganze Zahl durch $x_1^2+x_2^2+3x_3^2$ dargestellt werden kann. Er fügt hinzu[23]): „Ähnliche Betrachtungen lassen sich auf die durch 3 theilbaren Zahlen, zu deren Darstellbarkeit eine sich leicht ergebende Bedingung erforderlich ist, ... anwenden". Herr Post fand empirisch[24]), daß diese Bedingung

$$n \neq 9^\sigma(9k+6), \quad \sigma = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

lautet, bemerkt aber, daß ein vollständiger Beweis noch aussteht. Dieser wird nun in Satz III geführt.

Satz I. Voraussetzung: $n \geqq 0$ *und ganz,*

$$n \neq 4^\sigma(8k+7).$$

Behauptung: $n = x_1^2+x_2^2+x_3^2$, x_ν *ganz.*

Satz II. Voraussetzung: $n \geqq 0$ *und ganz,*

$$n \neq 4^\sigma(16k+14).$$

Behauptung: $n = x_1^2+x_2^2+2x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beides klassische Sätze[25]) der Zahlentheorie.

Hilfssatz 1[26]). **Voraussetzung:** $n > 0$, $3 \nmid n$.

Behauptung: $n = x_1^2+x_2^2+3x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beweis: Wegen $(96n,\ 40n-3) = 1$ gibt es ein positives ganzes k, so daß

$$b = 96nk+40n-3 = 8n(12k+5)-3$$

positiv und Primzahl wird. Setzen wir

$$12k+5 = \Delta' > 0, \tag{1}$$

so ist

$$b = 8n\Delta'-3 > 0, \tag{2}$$

$$b \equiv 5 \pmod 8. \tag{3}$$

---

22) Vgl. Fußnote 21).

23) A. a. O. Seite 232 bzw. Seite 96.

24) A. a. O. S. 9/10.

25) Vgl. die zitierte Abhandlung von Dirichlet. Oder Landau, *Handbuch* I, Seite 551. Ferner Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen, Erste Abtheilung* (1898), S. 139/149.

26) Von Dirichlet. Vgl. Fußnote 18).

Da die vorkommenden Jacobischen Symbole nach (1), (2) und (3) einen Sinn haben, ist

$$\left(\frac{-8\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{8\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right)\left(\frac{\Delta'}{b}\right) = -\left(\frac{b}{\Delta'}\right)$$
$$= -\left(\frac{-3}{\Delta'}\right) = -\left(\frac{\Delta'}{3}\right) = 1.$$

Da b Primzahl ist, folgt aus $\left(\frac{-8\Delta'}{b}\right) = 1$ die Existenz ganzer Zahlen a' und c, welche

$$a'^2 = -8\Delta' + bc,$$

oder

$$\Delta = bc - a'^2$$

erfüllen, wenn $\Delta = 8\Delta' > 0$ gesetzt wird.

Die ternäre quadratische Form $f = \begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ ist, wegen $b > 0$, $\Delta > 0$ und $D = n\Delta - b = 3$, mindestens einer der reduzierten Formen für $D = 3$ äquivalent. Wegen (3) ist f nicht φ_2 äquivalent, also $f \sim \varphi_1$, und n ist durch φ_1 eigentlich darstellbar.

Hilfssatz 2. Voraussetzung: $n > 0$, $n \equiv 1 \pmod 3$.

Behauptung: $n = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beweis: Wegen $(96n, 8n-3) = 1$ ist es möglich, durch geeignete Wahl der ganzen Zahl k

$$b'' = 96nk + 8n - 3 = 8n(12k+1) - 3$$

zu einer (positiven) Primzahl zu machen. Setzen wir

$$12k + 1 = \Delta' > 0, \qquad 24\Delta' = \Delta,$$

so haben wir

(1) $$b'' = 8n\Delta' - 3 > 0,$$

(2) $$b'' \equiv 5 \pmod{24}.$$

Da die vorkommenden Jacobischen Symbole alle einen Sinn haben, ist nach (1) und (2)

$$\left(\frac{-24\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{2}{b''}\right)\left(\frac{-3\Delta'}{b''}\right) = -\left(\frac{b''}{3\Delta'}\right)$$
$$= \left(\frac{-3}{\Delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'}{3}\right) = 1.$$

Da b'' eine von 3 verschiedene Primzahl ist, gibt es ein durch 3 teilbares a', so daß

$$a'^2 \equiv -24\Delta' \pmod{b''},$$

also

$$a'^2 \equiv -24\Delta' \pmod{3b''},$$

$$\Delta = bc - a'^2$$

mit ganzem c, wenn $3b'' = b$ gesetzt wird.

Für die ternäre Form $f = \begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ ist nun

$$b > 0, \quad \Delta > 0, \quad D = n\Delta - b = 9, \quad b \equiv 7 \pmod{8}.$$

Ein Vergleich mit den reduzierten Formen der Diskriminante 9 zeigt nun, da $n \equiv 1 \pmod 3$ und $b \equiv 7 \pmod 8$, daß Äquivalenz mit φ_1, φ_2 oder φ_4 außer Frage steht. Folglich ist n durch φ_3 darstellbar.

Satz III[27]. **Voraussetzung:** $n \geqq 0$ *und ganz*,

$$n \neq 9^\sigma(9k+6).$$

Behauptung: $n = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beweis: Der Fall $n = 0$ ist trivial.

Für $n = 9^\sigma(3k+1, 2)$ folgt die Behauptung aus Hilfssatz 1.

Es sei nunmehr $n = 9^\sigma(9k+3) > 0$.

Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Darstellung

$$3k+1 = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz.}$$

Hieraus folgt

$$9^\sigma(9k+3) = (3^{\sigma+1}y_3)^2 + (3^{\sigma+1}y_2)^2 + 3(3^\sigma y_1)^2.$$

Satz IV. Voraussetzung: $n \geqq 0$ *und ganz*,

$$n \neq 9^\sigma(3k+2).$$

Behauptung: $n = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beweis: Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial; ferner ist sie für $n \equiv 1 \pmod 3$ in Hilfssatz 2 bewiesen. Es sei $n = 3m$,

$$3m \neq 9^\sigma(3k+2), \quad \sigma > 0, \quad k \geqq 0,$$

also

$$m \neq 9^\sigma(9k+6), \quad \sigma \geqq 0, \quad m > 0.$$

Nach Satz III gibt es eine Darstellung

$$m = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz,}$$

aus der folgt

$$n = 3m = (3y_3)^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2.$$

---

27) Vgl. Fußnote 24).

Hilfssatz 3. Voraussetzung: $n > 0, \quad 3 \nmid n.$

Behauptung: $n = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2, \quad x_\nu$ *ganz.*

Beweis: 1) $(n, 6) = 1.$

Wegen $(96n, 8n-3) = 1$ gibt es eine positive ganze Zahl k, für welche

$$b'' = 96nk + 8n - 3 = 8n(12k+1) - 3$$

Primzahl ist. Setzen wir

$$12k + 1 = \Delta' > 0, \tag{1}$$

so ist

$$b'' = 8n\Delta' - 3, \tag{2}$$

$$b'' \equiv 5 \pmod 8, \tag{3}$$

$$b'' > 0. \tag{4}$$

Da die vorkommenden Jacobischen Symbole einen Sinn haben, folgt aus (1), (2), (3) und (4):

$$\left(\frac{-16\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{b''}{\Delta'}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'}{3}\right) = 1.$$

Da nun b'' Primzahl ist, gibt es eine gerade Zahl a', so daß

$$a'^2 \equiv -16\Delta' \pmod{b''},$$

also

$$a'^2 \equiv -16\Delta' \pmod{2b''}.$$

Es gibt also eine ganze Zahl c, so daß, wenn $16\Delta' = \Delta$, $2b'' = b$ gesetzt wird,

$$\Delta = bc - a'^2 > 0, \quad b = n\Delta - 6 > 0, \quad b \equiv 10 \pmod{16}.$$

Mithin ist die ternäre Form $f = \begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ einer der reduzierten der Diskriminante 6 äquivalent. φ_2 ist wegen $b \equiv 10 \pmod{16}$, φ_3 wegen $2 \nmid n$ ausgeschlossen, folglich ist $f \sim \varphi_1$ und n durch φ_1 darstellbar.

2) $n = 2m, \quad 3 \nmid m.$

Nach Satz III ist

$$m = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz},$$

folglich

$$2m = (y_1 + y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 6y_3^2.$$

Satz V. Voraussetzung: $n \geqq 0$ *und ganz,*

$$n \neq 9^\sigma(3k+1).$$

Behauptung: $n = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2, \quad x_\nu$ *ganz.*

Beweis: Der Fall $n = 0$ ist trivial. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $9 \nmid n$ voraussetzen.

1) $n \equiv 5 \pmod 6$.

Wegen $(96n,\ 8n-3) = 1$, $n > 0$, läßt sich die positive ganze Zahl k so wählen, daß

$$b'' = 96nk + 8n - 3 = 8n(12k+1) - 3$$

positiv und Primzahl wird. Setzen wir

$$12k + 1 = \Delta' > 0,$$

so wird

$$b'' = 8n\Delta' - 3 > 0,$$

wo

$$b'' \equiv 13 \pmod{24}.$$

Da die vorkommenden Jacobischen Symbole einen Sinn haben, ist

$$\left(\frac{-3\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{b''}{3\Delta'}\right) = \left(\frac{-3}{\Delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'}{3}\right) = 1.$$

Da b'' eine von 3 verschiedene Primzahl ist, gibt es ein durch 3 teilbares x, für welches

$$x^2 \equiv -3\Delta' \pmod{b''},$$

also

$$x^2 \equiv -3\Delta' \pmod{3b''},$$

folglich

$$(4x)^2 \equiv -48\Delta' \pmod{6b''}.$$

Es gibt also eine ganze Zahl c, so daß, $48\Delta' = \Delta$, $6b'' = b$ und $4x = a'$ gesetzt,

$$\Delta = bc - a'^2 > 0,$$

$$b = n\Delta - 18 > 0$$

und

$$b \equiv 30 \pmod{48}.$$

Die ternäre Form $f = \begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ der Diskriminante 18 ist einer von 7 reduzierten Formen äquivalent. φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_6 und φ_7 sind außer Frage, also ist $f \sim \varphi_5$ und n durch φ_5 darstellbar.

2) $n \equiv 3 \pmod 6$, $9 \nmid n$; also $n = 3m$, $(m, 6) = 1$.

Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Darstellung

$$m = y_1^2 + y_2^2 + 6y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz.}$$

Also ist

$$3m = 2(3y_3)^2 + 3y_2^2 + 3y_1^2.$$

3) $n \equiv 0, 2 \pmod 6$, $9 \nmid n$; also $n = 2m$, $m \neq 9^\sigma(3k+2)$.

Aus Satz IV folgt

$$m = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz},$$

also ist

$$2m = 2y_1^2 + 3(y_2+y_3)^2 + 3(y_2-y_3)^2.$$

Hilfssatz 4. Voraussetzung: $n > 0$, $3 \nmid n$,

$$n \equiv 3, 5, 7 \pmod 8.$$

Behauptung: $n = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beweis: 1) $n \equiv 3 \pmod 4$, $3 \nmid n$, $n > 0$.

Nach Satz III gibt es eine Darstellung

$$n = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2, \quad x_\nu \text{ ganz},$$

und in dieser muß $x_1 \equiv x_2 \pmod 2$ sein. Folglich gibt es ganze Zahlen y_1 und y_2, so daß $x_1 + x_2 = 2y_1$, $x_1 - x_2 = 2y_2$ und

$$n = (y_1+y_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + 3x_3^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 3x_3^2.$$

2) $n \equiv 5 \pmod 8$, $3 \nmid n$, $n > 0$.

Es läßt sich die ganze Zahl k so bestimmen, daß

$$b'' = 24nk + 5n - 6 = n(24k+5) - 6$$

positiv und Primzahl wird. Setzen wir

$$24k + 5 = \Delta' > 0,$$

so ist

(1) $$b'' = n\Delta' - 6 > 0,$$

(2) $$b'' \equiv 3 \pmod 8.$$

Hieraus folgt, da die vorkommenden Jacobischen Symbole einen Sinn haben,

$$\left(\frac{-2\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{b''}{\Delta'}\right) = \left(\frac{-6}{\Delta'}\right) = -\left(\frac{3}{\Delta'}\right) = -\left(\frac{\Delta'}{3}\right) = 1.$$

Nun ist das erste Symbol ein Legendresches, daher gibt es eine gerade Zahl a', für welche

$$a'^2 \equiv -2\Delta' \pmod{b''},$$

also

$$a'^2 \equiv -2\Delta' \pmod{2b''}.$$

Setzen wir $2\Delta' = \Delta$, $2b'' = b$, so existiert nach dieser Kon-

gruenz eine ganze Zahl c, für welche

$$\Delta = bc - a'^2 > 0.$$

Nach (1) und (2) ist ferner

$$n\Delta - b = 12,$$
$$b > 0,$$
$$b \equiv 6 \pmod 8.$$

Die Form $\begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ ist also positiv definit mit Diskriminante 12. Sie stellt u. a. die Zahlen

$$n \equiv 5 \pmod 8,$$
$$b \equiv 6 \pmod 8,$$
$$n + b \equiv 3 \pmod 8$$

dar, kann also nur φ_5 äquivalent sein.

Satz VI. Voraussetzung: $n > 0, \quad 3 \nmid n, \quad n \not\equiv 1 \pmod 8$.

Behauptung: $n = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2, \quad x_\nu$ *ganz.*

Beweis: 1) $2 \nmid n$.

Dieser Fall ist in Hilfssatz 4 erledigt.

2) $n = 2m, \quad m > 0, \quad 3 \nmid m$.

Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Darstellung

$$m = y_1^2 + y_2^2 + 6y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz};$$

folglich ist

$$n = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 3(2y_3)^2.$$

Satz VII. Voraussetzung: $n \geqq 0, \quad n \not\equiv 1 \pmod 4,$
$$n \neq 9^\sigma(3k+2).$$

Behauptung: $n = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2, \quad x_\nu$ *ganz.*

Beweis: 1) Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.

2) $n \equiv 3 \pmod 8, \quad n > 0, \quad n \neq 9^\sigma(3k+2)$.

Nach Satz IV gibt es eine Darstellung

$$n = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz},$$

und in dieser muß $y_1 = 2z_1$ sein, wo z_1 ganz, weil sonst $n \equiv 0, 1, 4, 5, 7 \pmod 8$ wäre.

3) $n \equiv 7 \pmod 8, \quad n > 0, \quad n \neq 9^\sigma(3k+2)$.

In der nach Satz IV existierenden Darstellung

$$n = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz},$$

gibt es zwei Möglichkeiten:

31) $y_1 = 2z_1$, z_1 ganz; dann sind wir fertig.

32) $y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv 1 \pmod 2$.

Dann gibt es ganze Zahlen z_1 und z_2, so daß

$$y_1 + y_2 = 2z_1, \quad y_1 - y_2 = 2z_2;$$

und es muß z_1 oder z_2 gerade sein, je nachdem $y_1 \not\equiv y_2 \pmod 4$ oder $y_1 \equiv y_2 \pmod 4$. Dann ist

$$\begin{aligned} n &= (z_1 + z_2)^2 + 3(z_1 - z_2)^2 + 3z_3^2 \\ &= (2z_1 - z_2)^2 + 3z_2^2 + 3z_3^2 \\ &= (2z_2 - z_1)^2 + 3z_1^2 + 3z_3^2, \end{aligned}$$

und in einer der beiden letzten Darstellungen muß das erste Glied durch 4 teilbar sein.

4) $n = 2m$, $m > 0$, $m \neq 9^\sigma(3k+1)$.

Nach Satz V gibt es eine Darstellung

$$m = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz},$$

aus welcher

$$n = 2m = 3(y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2 + 4y_1^2$$

folgt.

Hilfssatz 5. Voraussetzung: $n > 0$, $n \equiv 7 \pmod 8$.

Behauptung: $n = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2$, x_ν *ganz.*

Beweis: Wegen $\left(20n, \frac{25n-1}{2}\right) = 1$ läßt sich die ganze Zahl k so wählen, daß

$$2b'' = 5n(8k+5) - 1 > 0$$

und b'' Primzahl wird. Setzen wir

$$8k + 5 = \Delta' > 0, \tag{1}$$

so ist

$$\begin{aligned} 2b'' &= 5n\Delta' - 1 > 0, \\ b'' &\equiv 3 \pmod 4. \end{aligned}$$

Da die vorkommenden Jacobischen Symbole einen Sinn haben, ist

$$\left(\frac{2}{\Delta'}\right)\left(\frac{b''}{\Delta'}\right) = \left(\frac{2b''}{\Delta'}\right) = \left(\frac{-1}{\Delta'}\right) = 1.$$

Wegen (1) ist also $\left(\frac{b''}{\Delta'}\right) = -1$. Hieraus folgt nun

$$\left(\frac{-\Delta'}{b''}\right) = -\left(\frac{\Delta'}{b''}\right) = -\left(\frac{b''}{\Delta'}\right) = 1,$$

und, da b'' Primzahl ist, gibt es ein ungerades x, welches der Kongruenz

$$x^2 \equiv -\Delta' \pmod{b''},$$

also auch

$$(5x)^2 \equiv -25\Delta' \pmod{10b''}$$

genügt. Setzen wir $10b'' = b$, $25\Delta' = \Delta$, $5x = a'$, so gibt es ein ganzes c, für welches

$$\Delta = bc - a'^2 > 0,$$
$$n\Delta - b = 5,$$

während

$$b \equiv 20 \pmod{25}, \qquad b > 0.$$

Die positiv definite Form $\begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ mit $D = 5$ ist also φ_1 äquivalent und n durch diese darstellbar.

Satz VIII. Voraussetzung: $n > 0$, $n \equiv 7 \pmod{8}$.
Behauptung: $n = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$, x_ν *ganz.*
Beweis: Nach Hilfssatz 5 gibt es eine Darstellung

$$n = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2, \quad y_\nu \text{ ganz},$$

und in dieser muß $y_1 \equiv y_2 \equiv 1 \pmod{2}$ sein.

Es ist also $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$, wo x_1, x_2 ganz, und

$$n = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5y_3^2.$$

Satz IX. Voraussetzung: $n > 0$, $5 \nmid n$.
Behauptung: $n = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2$, x_ν *ganz.*
Beweis: 1) $(10, n) = 1$, $n > 0$.

Wegen $(160n, 56n - 5) = 1$ ist es möglich, die ganze Zahl k so zu wählen, daß

$$b'' = 8n(20k + 7) - 5 > 0$$

und b'' Primzahl wird. Setzen wir

(1) $$20k + 7 = \Delta' > 0,$$

so ist

2) $$b'' = 8n\Delta' - 5 > 0.$$

Die vorkommenden Jacobischen Symbole haben einen Sinn, und es ist nach (1) und (2)

$$\left(\frac{-\Delta'}{b''}\right) = \left(\frac{b''}{\Delta'}\right) = \left(\frac{-5}{\Delta'}\right) = -\left(\frac{5}{\Delta'}\right) = -\left(\frac{\Delta'}{5}\right) = 1.$$

Da b'' Primzahl ist, gibt es ein ganzes x für welches

$$x^2 \equiv -\Delta' \pmod{b''},$$

also auch

$$(4x)^2 \equiv -16\Delta' \pmod{2b''}.$$

Setzen wir $4x = a'$, $16\Delta' = \Delta$, $2b'' = b$, so haben wir die Existenz einer ganzen Zahl c nachgewiesen, für welche

$$\Delta = bc - a'^2 > 0.$$

Ferner ist nach (2)

$$n\Delta - b = 10,$$
$$b > 0,$$
$$b \equiv 6 \pmod{16}.$$

Da n ungerade ist, kann die positiv definite Form $\begin{Bmatrix} n, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ der Diskriminante 10 weder φ_1 noch φ_3 noch φ_4 äquivalent sein; folglich ist n durch φ_2 darstellbar.

2) $n = 2m$, $m > 0$, $5 \nmid m$.

Wegen $(320m, 8m - 5) = 1$ läßt sich die ganze Zahl k so wählen, daß

$$b = 8m(40k + 1) - 5 > 0$$

und b Primzahl wird. Setzen wir

$$40k + 1 = \Delta' > 0,$$

so ist

(3) $$b = 8m\Delta' - 5 > 0,$$

(4) $$b \equiv 3 \pmod{8}.$$

Da die vorkommenden Jacobischen Symbole einen Sinn haben, ist

$$\left(\frac{-8\Delta'}{b}\right) = -\left(\frac{2}{b}\right)\left(\frac{\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{\Delta'}{b}\right) = \left(\frac{b}{\Delta'}\right)$$
$$= \left(\frac{-5}{\Delta'}\right) = \left(\frac{5}{\Delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'}{5}\right) = 1.$$

Da b Primzahl ist, gibt es ganze Zahlen a' und c derart, daß

$$a'^2 = -8\Delta' + bc,$$

oder, wenn $8\Delta' = \Delta$ gesetzt wird, daß

$$\Delta = bc - a'^2 > 0.$$

Ferner ist nach (3) und (4)

$$m\Delta - b = 5, \quad b > 0, \quad b \equiv 3 \pmod 8.$$

Die Form $\begin{Bmatrix} m, & b, & c \\ a', & 1, & 0 \end{Bmatrix}$ ist also positiv definit mit der Diskriminante 5, aber nicht φ_1 äquivalent, folglich gibt es ganzzahlige y_1, y_2 und y_3 für welche

$$m = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 - 2y_2y_3,$$
$$n = 2m = (2y_2 - y_3)^2 + 2y_1^2 + 5y_3^2.$$

§ 4. Zerlegungen in sieben Kuben.

Hilfssatz 1. Voraussetzung: *c, m, n ganz,*

$$(c, m) = 1, \quad m \geqq 1 \text{ quadratfrei}, \quad 3 \nmid \varphi(m).$$

Behauptung: *Die Kongruenz*

$$n \equiv ca^3 \pmod m, \quad 0 \leqq a < m,$$

ist nach a lösbar.

Beweis: Mit a durchläuft auch ca^3 ein vollständiges Restsystem modulo m.

Hilfssatz 2. Voraussetzung: $(k, l) = 1, \quad k > 0,$

$$\delta > 0, \quad n_0 > 0 \text{ und ganz.}$$

Behauptung: *Es gibt eine Zahl* $x_0 = x_0(k, \delta, n_0)$ *mit folgender Eigenschaft: Wenn* $x \geqq x_0$, *so gibt es zu jedem* l *mindestens* n_0 *Primzahlen* $p \equiv l \pmod k$, *die sämtlich dem Intervall* $x < p \leqq x + \delta x$ *angehören.*

Beweis: Bei festem l ist dies eine unmittelbare Folge des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen[28]), und l kann nur $\varphi(k)$ verschiedenen Restklassen modulo k angehören.

Hilfssatz 3[29]). **Voraussetzung:** $8t^3 \mid N, \quad t \geqq 2$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0 = N_0(t)$ *derart, daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

---

28) Vgl. z. B. Landau, *Handbuch* I, S. 469.

29) Für $t = 2$ findet sich dieser Satz mit ähnlichem Beweis schon bei Herrn Baer, a. a. O. S. 32/33.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\sqrt[3]{\frac{26\,(4t^3)^3}{(20t^6+27)(4t)^3}} \geqq \sqrt[3]{\frac{26}{20+(\frac{3}{4})^3}} > 1. \tag{1}$$

Nach Hilfssatz 2 mit $k = 6$, $l = 5$, $n_0 = 1$,

$$x = \sqrt[3]{\frac{N}{26\,(4t^3)^3}}, \quad 1+\delta = \sqrt[3]{\frac{26}{20+(\frac{3}{4})^3}} > 1$$

gibt es zu jedem $x \geqq x_0$, wo x_0 eine absolute Konstante ist, mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$, die dem Intervall

$$\sqrt[3]{\frac{N}{26\,(4t^3)^3}} < p \leqq \sqrt[3]{\frac{26}{20+(\frac{3}{4})^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{26\,(4t^3)^3}}$$

angehört. Nach (1) folgt a fortiori: Wenn

$$N \geqq N_0(t) = 26 \cdot 64 x_0^3 t^9,$$

so gibt es stets eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$, für welche

$$(20t^6+27)(4t)^3 p^3 \leqq N < 26\,(4t^3)^3 p^3,$$

oder

$$20\,(4t^3p)^3 + 8t^3(6p)^3 \leqq N < 20\,(4t^3p)^3 + 24t^3p\,(4t^3p)^2.$$

Für solche N ist, wenn

$$N - 20\,(4t^3p)^3 = 8t^3n$$

gesetzt wird, n eine ganze Zahl und

$$(6p)^3 \leqq n < 3p\,(4t^3p)^2.$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind für $c = 1$, $m = 3p$ und unser n erfüllt; mithin gibt es ganze Zahlen a und X, so daß

$$n = a^3 + 3pX,$$

$$0 \leqq a < 3p, \tag{2}$$

$$0 < X < (4t^3p)^2. \tag{3}$$

Ist $a \not\equiv n \pmod 2$, also $X \equiv 1 \pmod 2$, so behalten wir diese Lösung bei.

Ist aber $a \equiv n \pmod 2$, so beachten wir, daß für $b = a + 3p$

$$n = b^3 + 3pY,$$

$$0 \leqq b < 6p, \tag{4}$$

$$0 < Y < (4t^3p)^2, \tag{5}$$

wo $b \not\equiv n \pmod 2$, also $Y \equiv 1 \pmod 2$.

Nach § 3 Satz II gelangen wir stets zu einer Darstellung mit ganzzahligen x_ν

$$\begin{aligned} N &= (2td)^3 + 20(4t^3p)^3 + 24t^3p(x_1^2+x_2^2+2x_3^2) \\ &= (2td)^3 + (4t^3p+x_1)^3 + (4t^3p+x_2)^3 + (8t^3p+x_3)^3 \\ &\quad + (4t^3p-x_1)^3 + (4t^3p-x_2)^3 + (8t^3p-x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher wegen (2), (3), (4) und (5) kein Summand negativ ist.

Hilfssatz 4[30]. **Voraussetzung:** $4t^3 \mid N$, $t \geqq 2$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0 = N_0(t)$, *so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 dürfen wir $8t^3 \nmid N$ voraussetzen. Nach Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{208t^9}}$, $n_0 = 1$ und

$$1+\delta = \sqrt[3]{\frac{208t^9}{160t^9+(6t)^3}} \geqq \sqrt[3]{\frac{208}{160+(\frac{6}{4})^3}} > 1$$

gibt es ein $N_0 = 208x_0^3t^9$, wo x_0 eine absolute Konstante, so daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt, für welche

$$(1) \qquad (160t^9+(6t)^3)p^3 \leqq N < 208t^9p^3.$$

Aus der Voraussetzung und (1) folgt im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} N - 20(2t^3p)^3 &= 4t^3n, \\ 2(3p)^3 \leqq n &< 3p(2t^3p)^2, \end{aligned}$$

wo n eine ungerade Zahl ist. Nach Hilfssatz 1, dessen Voraussetzungen für $c = 2$, $m = 3p$ und unser n gewiß erfüllt sind, gibt es ein ganzes a und ein ungerades X, für welche

$$n = 2a^3 + 3pX,$$

$$(2) \qquad 0 \leqq a < 3p,$$

$$(3) \qquad 0 < X < (2t^3p)^2.$$

Aus § 3 Satz II ergibt sich nun die Zerlegung mit ganzzahligen x_ν

---

30) Herr Baer beweist a. a. O. S. 33/34 auf anderem Wege die Zerlegbarkeit aller großen $N \equiv 32 \pmod{64}$.

$$N = (2ta)^3 + 20(2t^3p)^3 + 12t^3p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)$$
$$= (2ta)^3 + (2t^3p + x_1)^3 + (2t^3p + x_2)^3 + (4t^3p + x_3)^3$$
$$+ (2t^3p - x_1)^3 + (2t^3p - x_2)^3 + (4t^3p - x_3)^3,$$

in welcher nach (2) und (3) kein Summand negativ ist.

Hilfssatz 5[31]. **Voraussetzung:** $2t^3 \mid N$, $t \geqq 2$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0 = N_0(t)$, *so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 dürfen wir $4t^3 \nmid N$ voraussetzen. Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{26t^9}}$, $n_0 = 1$ und

$$1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{26t^9}{20t^9 + (6t)^3}} \geqq \sqrt[3]{\frac{26}{20 + (\frac{6}{4})^3}} > 1$$

folgt die Existenz eines $N_0 = 26x_0^3t^9$, wo x_0 eine absolute Konstante, so daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt derart, daß

(1) $$(20t^9 + (6t)^3)p^3 \leqq N < 26t^9p^3.$$

Für ein solches N und zugehöriges p ist

$$N - 20t^9p^3 = 2t^3n,$$

wo n ungerade und nach (1)

$$4(3p)^3 \leqq n < 3p(t^3p)^2.$$

Für $c = 4$, $m = 3p$ und unser n sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gewiß erfüllt; folglich gibt es ein ganzes a und ein ungerades X, für welche

$$n = 4a^3 + 3pX,$$

(2) $$0 \leqq a < 3p,$$

(3) $$0 < X < (t^3p)^2.$$

Aus § 3 Satz II folgt nun eine Zerlegung mit ganzzahligen x_ν

$$N = (2ta)^3 + 20(t^3p)^3 + 6t^3p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)$$
$$= (2ta)^3 + (t^3p + x_1)^3 + (t^3p + x_2)^3 + (2t^3p + x_3)^3$$
$$+ (t^3p - x_1)^3 + (t^3p - x_2)^3 + (2t^3p - x_3)^3,$$

in welcher nach (2) und (3) kein Glied negativ ist.

---

31) Der Fall $t = 2$, $N \equiv 16 \pmod{32}$ wird von Herrn Baer a. a. O. S. 33/34, der Fall $t = 3$, $N \equiv 54 \pmod{108}$ auf S. 38/40 auf anderem Wege erledigt.

Satz I[32]. **Voraussetzung:** $8 \mid N$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Der Fall $16 \mid N$ ist in Hilfssatz 5 erledigt. Wir nehmen daher an $N = 8u$, $2 \nmid u$.

Je nachdem $u \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$,

sei $l = 5, 23, 17, 11$;

so daß in allen Fällen

$$u \equiv 5l \pmod 8, \tag{1}$$
$$l \equiv 5 \pmod 6.$$

Nach Hilfssatz 2 mit $k = 24$, $n_0 = 1$,

$$x = \sqrt[3]{\frac{N}{64 \cdot 330}}, \quad 1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 330}{64 \cdot 309}} > 1$$

gibt es eine absolute Konstante x_0 derart, daß es für jedes unserer l, wenn nur $x \geqq x_0$ ist, mindestens eine Primzahl $p \equiv l \pmod{24}$ gibt, so daß

$$\sqrt[3]{\frac{N}{64 \cdot 330}} < p \leqq \sqrt[3]{\frac{N}{64 \cdot 330}} \cdot \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 330}{64 \cdot 309}}.$$

Wenn also $N \geqq N_0 = 64 \cdot 330 x_0^3$, so gibt es zu jedem unserer l mindestens eine Primzahl $p \equiv l \pmod{24}$ derart, daß

$$64 \cdot 309 p^3 \leqq N < 64 \cdot 330 p^3,$$

was wir in der Form schreiben wollen:

$$282(4p)^3 + 8(6p)^3 \leqq N < 282(4p)^3 + 8 \cdot 3p \cdot 2(8p)^2. \tag{2}$$

Für ein solches N und zugehöriges p ist

$$N - 282(4p)^3 = 8v,$$

wo nach (1) und nach (2)

$$5p \equiv u \equiv v \pmod 8,$$
$$(6p)^3 \leqq v < 3p \cdot 2(8p)^2. \tag{3}$$

Für $c = 1$, $m = 3p$ und $n = v$ sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, folglich gibt es ganze Zahlen a und X, für welche nach (3)

---

32) Bei Herrn Baer, a. a. O. S. 32/37 kommen die Fälle vor:
$16 \mid N$ und $N \equiv 8, 24, 56, 72, 88, 120, 136 \pmod{144}$.

$$v = a^3 + 3pX, \tag{4}$$

$$0 \leqq a < 3p, \tag{5}$$

$$0 < X < 2(8p)^2. \tag{6}$$

Ist a gerade, so folgt aus (4) und (5)

$$\left.\begin{aligned} 5p &\equiv 0 + 3pX \\ X &\equiv 7 \end{aligned}\right\} \pmod 8.$$

Ist a ungerade, so ist $b = a + 3p$ gerade,

$$v = b^3 + 3pY,$$

$$0 \leqq b < 6p, \tag{7}$$

$$0 < Y < 2(8p)^2, \tag{8}$$

$$Y \equiv 7 \pmod 8.$$

Nach § 3 Satz VIII gibt es stets eine Darstellung mit ganzzahligen x_ν

$$\begin{aligned} N &= (2d)^3 + 282(4p)^3 + 24p(2x_1^3 + 2x_2^2 + 5x_3^2) \\ &= (2d)^3 + (8p + x_1)^3 + (8p + x_2)^3 + (20p + x_3)^3 \\ &\quad + (8p - x_1)^3 + (8p - x_2)^3 + (20p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher nach (5), (6), (7) und (8) kein Summand negativ ist.

Satz II[33]. **Voraussetzung:** $t^3 \mid N$, $t \geqq 2$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0' = N_0(t)$, *so daß*

$$N = K_7' \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Wegen Satz I dürfen wir $t \geqq 3$ und ungerade, wegen Hilfssatz 5 auch N ungerade annehmen.

Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{26t^9}}$, $n_0 = 1$, $k = 6$, $l = 5$,

$$1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{26t^9}{20t^9 + (12t)^3}} \geqq \sqrt[3]{\frac{26}{20 + (\frac{12}{9})^3}} > 1$$

garantiert die Existenz eines $N_0' = 26x_0^3 t^9$, wo x_0 eine absolute positive Konstante, derart, daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt, für welche

$$(20t^9 + (12t)^3)p^3 \leqq N < (20t^9 + 6t^9)p^3. \tag{1}$$

---

33) Den Fall $t = 3$ hat bereits Herr Baer, a. a. O. S. 38/40 auf anderem Wege erledigt. Für $t = 14$ bewies er (a. a. O. S. 31/32) die Zerlegbarkeit von $14^3 u$, $2 \nmid u$, $u \geqq 1$.

Für ein solches N und zugehöriges p ist

$$N - 20(t^3 p)^3 = t^3 n,$$

wo n ungerade, und nach (1)

$$(2) \qquad (12p)^3 \leqq n < 6p(t^3 p)^2.$$

Nach Hilfssatz 1 mit $c = 1$, $m = 6p$ und unserm n gibt es ein ungerades a und ein ganzes X, für welche nach (2)

$$(3) \qquad n = a^3 + 6pX,$$
$$(4) \qquad 0 < a < 6p,$$
$$(5) \qquad 0 < X < (t^3 p)^2.$$

Falls X ungerade ist, behalten wir diese Lösung bei. Ist X gerade, so gibt es zu $b = a + 6p$ ein ganzes Y, so daß

$$(6) \qquad n = b^3 + 6pY,$$
$$(7) \qquad 0 < b < 12p,$$
$$(8) \qquad 0 < Y < (t^3 p)^2.$$

Aus (3) und (6) folgt

$$X - Y = 3a^2 + 3a \cdot 6p + (6p)^2,$$
$$X - Y \equiv 1 \pmod 2,$$

weil a jedenfalls ungerade; also ist Y ungerade. In jedem Fall gelangen wir nach § 3 Satz II zu einer Darstellung

$$\begin{aligned} N &= (td)^3 + 20(t^3 p)^3 + 6t^3 p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \\ &= (td)^3 + (t^3 p + x_1)^3 + (t^3 p + x_2)^3 + (2t^3 p + x_3)^3 \\ &\quad + (t^3 p - x_1)^3 + (t^3 p - x_2)^3 + (2t^3 p - x_3)^3. \end{aligned}$$

in welcher die x_ν ganzzahlig und wegen (4), (5), (7) und (8) sämtliche Glieder positiv sind.

Satz III[34]. **Voraussetzung:** $N \equiv 0, 20$ *oder* $28 \pmod{36}$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K, \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{8 \cdot 172}}$, $n_0 = 1$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 172}{8 \cdot 151}} > 1$ gibt es eine feste Zahl N_0, so daß

34) $N \equiv 0, 56, 64 \pmod{72}$ sind bereits in Satz I enthalten. Bei Herrn Baer, a. a. O. S. 37/38 finden bereits die Fälle $N \equiv 0, 28 \pmod{36}$ auf anderem Wege ihre Erledigung.

zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gehört, für welche

(1) $$(124 \cdot 2^3 + 6^3) p^3 \leqq N < (124 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2 \cdot 4^2) p^3.$$

Für solche N und p ist

$$N - 124 (2p)^3 = 4n,$$

wo n ganz; wegen

$$124 (2p)^3 \equiv 16 \pmod{36}$$

ist

$$n \equiv 5,\ 1 \text{ bzw. } 3 \pmod 9.$$

Ferner ist nach (1)

$$2 (3p)^3 \leqq n < 3p \cdot 2 (4p)^2.$$

Nach Hilfssatz 1 mit $c = 2$, $m = 3p$ gibt es ganze Zahlen a und X, für welche

$$n = 2a^3 + 3pX,$$

(2) $$0 \leqq a < 3p,$$

(3) $$0 < X < 2 (4p)^2.$$

Da $2a^3$ nur der Werte 0, 2, 7 (mod. 9) fähig ist, und $3 \mid n - 2a^3$, so folgt in den drei vorliegenden Fällen stets

$$3 \equiv 3pX \pmod 9,$$
$$X \equiv 2 \pmod 3.$$

Nach § 3 Satz V folgt eine Darstellung mit ganzzahligen x_ν

$$\begin{aligned} N &= (2a)^3 + 124 (2p)^3 + 12p (2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2) \\ &= (2a)^3 + (4p + x_1)^3 + (6p + x_2)^3 + (6p + x_3)^3 \\ &\quad + (4p - x_1)^3 + (6p - x_2)^3 + (6p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher wegen (2) und (3) kein Glied negativ ist.

Hilfssatz 6. Voraussetzung: $18 \mid N$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Wenn $27 \mid N$, folgt die Behauptung aus Satz II; wenn $36 \mid N$, aus Satz III. Wir dürfen also annehmen $27 \nmid N$, $N \equiv 2 \pmod 4$.

Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{27 \cdot 134}}$, $n_0 = 1$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 134}{27 \cdot 94}} > 1$ folgt die Existenz einer Konstanten N_0

derart, daß zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gehört, für welche

$$(86 \cdot 3^3 + 6^3) p^3 \leqq N < (86 \cdot 3^3 + 2 \cdot 18 \cdot 6^2) p^3.$$

Für solche N und p ist

$$\begin{aligned} N - 86 (3p)^3 &= 9n, \\ n &\equiv 0 \pmod 4, \\ 3 &\nmid n, \\ 3 (2p)^3 \leqq n &< 2p \cdot 2 (6p)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Nach Hilfssatz 1 mit $c = 3$, $m = 2p$ und unserm n gibt es ein gerades a und daher nach (1) ein gerades X, für welche

$$n = 3a^3 + 2pX, \tag{2}$$

$$0 \leqq a < 2p, \tag{3}$$

$$0 < X < 2 (6p)^2,$$

$$(X, 6) = 2.$$

Nach § 3 Satz VI folgt eine Darstellung

$$\begin{aligned} N &= (3a)^3 + 86 (3p)^3 + 18p (2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2) \\ &= (3a)^3 + (6p + x_1)^3 + (6p + x_2)^3 + (9p + x_3)^3 \\ &\quad + (6p - x_1)^3 + (6p - x_2)^3 + (9p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher die x_i ganz sind und wegen (2), (3) kein Summand negativ ist.

Hilfssatz 7. Voraussetzung: $N \equiv 18 \pmod{27}$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{27 \cdot 172}}$, $n_0 = 1$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 172}{27 \cdot 132}} > 1$ folgt die Existenz eines N_0, so daß es zu jedem $N \geqq N_0$ eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt derart, daß

$$(124 \cdot 3^3 + 6^3) p^3 \leqq N < (124 \cdot 3^3 + 18 \cdot 2 \cdot 6^2) p^3.$$

Für solche N ist

$$\begin{aligned} N - 124 (3p)^3 &= 9n, \\ n &\equiv 2 \pmod 3, \\ 3 (2p)^3 \leqq n &< 2p \cdot 2 (6p)^2. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1 mit $c = 3$, $m = 2p$ und unserm n gibt es ganze Zahlen a und X, für welche

$$n = 3a^3 + 2pX,$$

(1) $$0 \leqq a < 2p,$$

(2) $$0 < X < 2(6p)^2,$$

$$2 \equiv 0 + 2pX \pmod 3,$$

also $$X \equiv 2 \pmod 3.$$

Nach § 3 Satz V folgt eine Zerlegung

$$\begin{aligned} N &= (3a)^3 + 124(3p)^3 + 18p(2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2) \\ &= (3a)^3 + (6p + x_1)^3 + (9p + x_2)^3 + (9p + x_3)^3 \\ &\quad + (6p - x_1)^3 + (9p - x_2)^3 + (9p - x_3)^3 \end{aligned}$$

mit ganzzahligen x_ν, in welcher wegen (1) und (2) kein Glied negativ ist.

Satz IV. Voraussetzung: $9 \mid N$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K_7 \quad \textit{für} \quad N \geqq N_0.$$

Beweis: Die Fälle $N \equiv 0, 18, 27, 36, 45 \pmod{54}$ sind in Satz II und den Hilfssätzen 6, 7 enthalten.

Es sei daher $N \equiv 9 \pmod{54}$.

Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\dfrac{N}{27 \cdot 398}}$, $n_0 = 1$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\dfrac{27 \cdot 398}{27 \cdot 300}} > 1$ folgt die Existenz einer Konstanten N_0 derart, daß zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gehört, so daß

$$(236 \cdot 3^3 + 12^3)p^3 \leqq N < (236 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3 \cdot 9^2)p^3.$$

Für solche N und p ist

$$N - 236(3p)^3 = 9n,$$

$$n \equiv 1 \pmod 6,$$

$$3(4p)^3 \leqq n < 2p \cdot 3(9p)^2.$$

Nach Hilfssatz 1 mit $c = 3$, $m = 2p$ und unserm n gibt es ganze Zahlen a und X, a ungerade, für welche

$$n = 3a^3 + 2pX,$$

(1) $$0 < a < 2p,$$

(2) $$0 < X < 3(9p)^2,$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &\equiv 0 + 2pX \\ X &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod 3.$$

Wenn $X \not\equiv 1 \pmod 4$, behalten wir diese Lösung bei. Sollte aber $X \equiv 1 \pmod 4$ sein, so beachten wir, daß es zu $b = a + 2p$ ein ganzes Y gibt, für welches

$$n = 3b^3 + 2pY,$$

(3) $$0 < b < 4p,$$

(4) $$0 \leq Y < 3(9p)^2,$$

$$X - Y = 3(3a^2 + 3a \cdot 2p + (2p)^2);$$

folglich

$$X - Y \equiv 1 + 2 \pmod 4,$$

also, im Falle $X \equiv 1 \pmod 4$,

$$Y \equiv 2 \pmod 4.$$

Andrerseits ist auch

$$Y \equiv 1 \pmod 3.$$

Nach § 3 Satz VII können wir stets zu einer Darstellung gelangen

$$\begin{aligned} N &= (3d)^3 + 236(3p)^3 + 18p(3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2) \\ &= (3d)^3 + (9p + x_1)^3 + (9p + x_2)^3 + (12p + x_3)^3 \\ &\quad + (9p - x_1)^3 + (9p - x_2)^3 + (12p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher die x_ν ganzzahlig und wegen (1), (2), (3), (4) sämtliche Glieder positiv sind.

Hilfssatz 8. Voraussetzung: $4t^2 \mid N$, $t \geq 2$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0 = N_0(t)$, *so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geq N_0.$$

Beweis: Wenn $8 \mid N$ folgt die Behauptung aus Satz I.

Wir dürfen also $t \geq 3$, $N \equiv 4 \pmod 8$ voraussetzen. Offenbar genügt es dann, die Behauptung für ungerade Primzahlen t zu beweisen. Für $t = 3$ ist dies bereits in Satz III geschehen; es sei also $t \geq 5$. Nach Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{208t^6}}$, $n_0 = 2$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{208t^6}{160t^6 + (6t)^3}} \geq \sqrt[3]{\frac{208}{160 + (\frac{6}{5})^3}} > 1$ gibt es ein

$N_0 = N_0(t) = 208 x_0^3 t^6$, wo x_0 eine absolute positive Konstante, derart, daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine von t verschiedene Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt, für welche

$$(20(2t^2)^3 + (6t)^3)p^3 \leqq N < (20(2t^2)^3 + 12 \cdot 4t^6)p^3.$$

Für ein solches N und zugehöriges p ist

$$N - 20(2t^2p)^3 = 4t^2n,$$
$$n \equiv 1 \pmod 2,$$
$$2t(3p)^3 \leqq n < 3p(2t^2p)^2.$$

Wegen $(2t, 3p) = 1$ sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 für $c = 2t$, $m = 3p$ und unser n erfüllt; folglich gibt es ein ganzes a und ein ungerades X, für welche

$$n = 2ta^3 + 3pX,$$
(1) $$0 \leqq a < 3p,$$
(2) $$0 < X < (2t^2p)^2.$$

Nach § 3 Satz II gelangen wir zu einer Darstellung

$$\begin{aligned} N &= (2ta)^3 + 20(2t^2p)^3 + 12t^2p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2), \\ &= (2ta)^3 + (2t^2p + x_1)^3 + (2t^2p + x_2)^3 + (4t^2p + x_3)^3 \\ &\quad + (2t^2p - x_1)^3 + (2t^2p - x_2)^3 + (4t^2p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher die x_ν ganz sind und wegen (1), (2) kein Glied negativ ist.

Hilfssatz 9[35]. **Voraussetzung:** $2t^2 \mid N$, $t \geqq 2$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0 = N_0(t)$ *derart, daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Für gerade t ist die Behauptung bereits in Satz I bewiesen. Sie wird für alle ungeraden t bewiesen sein, wenn der Beweis für ungerade Primzahlen t geführt ist. Für $t = 3$ ist dies bereits in Hilfssatz 6 geschehen. Wir dürfen also t als Primzahl, $t \geqq 5$ und wegen Hilfssatz 8 auch $4 \nmid N$ voraussetzen.

Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{26t^6}}$, $n_0 = 2$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{26t^6}{20t^6 + (6t)^3}} \geqq \sqrt[3]{\frac{26}{20 + (\frac{6}{5})^3}} > 1$ folgt die Existenz eines $N_0 = N_0(t) = 26x_0^3t^6$, wo x_0 eine absolute positive Konstante,

35) Für Primzahlen $t \geqq 7$ wurde dieser Satz bereits von Herrn Post a. a. O. S. 13/15 auf anderm Wege bewiesen; die „bestimmte Stelle" hängt allerdings von t ab. Vgl. ferner Satz V.

derart, daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine von t verschiedene Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt, für welche

$$(20t^6 + (6t)^3)p^3 \leqq N < (20t^6 + 6t^6)p^3.$$

Für solche N und p ist

$$N - 20(t^2p)^3 = 2t^2n,$$
$$n \equiv 1 \pmod 2,$$
$$4t(3p)^3 \leqq n < 3p(t^2p)^2.$$

Wegen $(4t, 3p) = 1$ sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 für $c = 4t$, $m = 3p$ und unser n gewiß erfüllt, und es folgt die Existenz eines ganzen a und eines ungeraden X, für welche

$$n = 4ta^3 + 3pX,$$
(1) $$0 \leqq a < 3p,$$
(2) $$0 < X < (t^2p)^2.$$

Nach § 3 Satz II folgt nun eine Zerlegung

$$\begin{aligned} N &= (2ta)^3 + 20(t^2p)^3 + 6t^2p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \\ &= (2ta)^3 + (t^2p + x_1)^3 + (t^2p + x_2)^3 + (2t^2p + x_3)^3 \\ &\quad + (t^2p - x_1)^3 + (t^2p - x_2)^3 + (2t^2p - x_3)^3 \end{aligned}$$

mit ganzzahligen x_ν, in welcher wegen (1) und (2) kein Glied negativ ist.

Hilfssatz 10[36]. **Voraussetzung:** $5^2 \mid N$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante N_0, so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

Beweis: Wegen Satz II dürfen wir $5^3 \nmid N$ voraussetzen. Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{5^6(268+6)}}$, $n_0 = 2$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{5^6(268+6)}{5^3(268 \cdot 5^3 + 6^3)}} = \sqrt[3]{\frac{274}{268 + (\frac{6}{5})^3}} > 1$ folgt die Existenz einer Konstanten N_0 derart, daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine von 5 verschiedene Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt, für welche

(1) $$268(25p)^3 + (30p)^3 \leqq N < 268(25p)^3 + 25 \cdot 6p(25p)^2.$$

Für solche N und p ist

$$N - 268(25p)^3 = 25n,$$

36) Für gerade N besagt dieser Satz nichts Neues.

wo n ganz ist und $5 \nmid n$. Nach (1) gilt ferner

$$5(6p)^3 \leqq n < 6p(25p)^2.$$

Wegen $5 \nmid 6p$ sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 für $c = 5$, $m = 6p$ und unser n erfüllt; also gibt es ein ganzes a und ein zu 5 teilerfremdes ganzes X, so daß

$$n = 5a^3 + 6pX,$$

$$0 \leqq a < 6p, \tag{2}$$

$$0 < X < (25p)^2. \tag{3}$$

Nach § 3 Satz IX folgt nun eine Zerlegung

$$\begin{aligned} N &= (5a)^3 + 268(25p)^3 + 6 \cdot 25p(x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2) \\ &= (5a)^3 + (25p + x_1)^3 + (50p + x_2)^3 + (125p + x_3)^3 \\ &\quad + (25p - x_1)^3 + (50p - x_2)^3 + (125p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher die x_ν ganz sind und wegen (2), (3) kein Glied negativ ist.

Satz V. Voraussetzung: $t^2 \mid N$, $t \geqq 3$ *und ganz.*

Behauptung: *Es gibt ein* $N_0 = N_0(t)$ *derart, daß*

$$N = K_7 \quad \textit{für} \quad N \geqq N_0.$$

Beweis: 1) t gerade, $t = 2^\lambda u$, wo u ungerade, $\lambda \geqq 1$.

11) Wenn $u = 1$, muß nach Voraussetzung $\lambda \geqq 2$ sein, und die Behauptung ist in Satz I bewiesen.

12) Wenn $u \geqq 3$, folgt die Behauptung aus Hilfssatz 9.

2) t ungerade, $t \geqq 3$.

21) N gerade. Die Behauptung ist in Hilfssatz 9 bewiesen.

22) N ungerade.

Es ist offenbar hinreichend, den Satz für ungerade Primzahlen t zu beweisen.

Für $t = 3$, 5 ist die Behauptung in Satz IV bzw. Hilfssatz 10 bewiesen.

Es ist daher keine Einschränkung der Allgemeinheit N als ungerade und t als Primzahl, $t \geqq 7$ vorauszusetzen.

In Hilfssatz 2 dürfen wir $x = \sqrt[3]{\frac{N}{26t^6}}$, $n_0 = 2$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{26t^3}{20t^6 + (12t)^3}} \geqq \sqrt[3]{\frac{26}{20 + (\frac{12}{7})^3}} > 1$ setzen. Es gibt also

ein $N_0 = N_0(t) = 26 x_0^3 t^6$, wo x_0 eine absolute positive Konstante, so daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine von t verschiedene Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt, für welche

$$(20t^6 + (12t)^3)\, p^3 \leqq N < (20t^6 + 6t^6) p^3.$$

Für ein solches N und zugehöriges p ist

$$N - 20(t^2 p)^3 = t^2 n$$
$$n \equiv 1 \pmod 2,$$
$$t(12p)^3 \leqq n < 6p(t^2 p)^2.$$

Wegen $(t, 6p) = 1$ sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 für $c = t$, $m = 6p$ und unser n erfüllt. Es gibt daher ein ungerades a und ein ganzes X, für welche

$$n = ta^3 + 6pX,$$
(1) $$0 < a < 6p,$$
(2) $$0 < X < (t^2 p)^2.$$

Ist X ungerade, behalten wir diese Lösung bei.

Ist X gerade, so beachten wir, daß es zu $b = a + 6p$ ein ganzzahliges Y gibt, so daß

$$n = tb^3 + 6pY,$$
(3) $$0 < b < 12p,$$
(4) $$0 < Y < (t^2 p)^2,$$
$$X - Y = t(3a^2 + 3a \cdot 6p + (6p)^2),$$

folglich

$$X - Y \equiv 1 \pmod 2.$$

Wenn X gerade, ist also Y ungerade.

Nach § 3 Satz II können wir in allen Fällen eine Darstellung mit ganzen x_ν gewinnen

$$\begin{aligned} N &= (td)^3 + 20(t^2 p)^3 + 6t^2 p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \\ &= (td)^3 + (t^2 p + x_1)^3 + (t^2 p + x_2)^3 + (2t^2 p + x_3)^3 \\ &\quad + (t^2 p - x_1)^3 + (t^2 p - x_2)^3 + (2t^2 p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher wegen (1), (2), (3) und (4) kein Glied negativ ist.

Satz VI[37]. **Voraussetzung:** $N \equiv 44 \pmod{72}$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante N_0, so daß*

$$N = K_7 \text{ für } N \geqq N_0.$$

---

37) Dieser Satz und auch die Beweismethode stammen von Herrn Baer a. a. O. S. 37/38.

Beweis: Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{6^3 \cdot 26}}$, $n_0 = 1$, $k = 6$, $l = 5$, $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{6^3 \cdot 26}{6^3 \cdot 21}} > 1$ folgt die Existenz einer Konstanten N_0 derart, daß zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod 6$ gehört, so daß

$$(20 \cdot 6^3 + 6^3) p^3 \leqq N < (20 \cdot 6^3 + 4 \cdot 9 \cdot 6^2) p^3.$$

Für ein solches N und zugehöriges p ist

$$N - 20(6p)^3 = 4n,$$
$$n \equiv 11 \pmod{18},$$
$$2(3p)^3 \leqq n < 9p(6p)^2.$$

Die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sind für $c = 2$, $m = p$ erfüllt; folglich gibt es ein ganzes a und ein ungerades X, für welche

$$n = 2a^3 + pX,$$
$$0 \leqq a < p,$$
$$0 < X < 9(6p)^2.$$

Ist $a \equiv 1 \pmod 3$, so behalten wir diese Lösung bei.

Auf alle Fälle gibt es unter den Zahlen a, $a + p$, $a + 2p$ ein $b \equiv 1 \pmod 3$. Für dieses ist

$$n = 2b^3 + pY,$$
(1) $$0 \leqq b < 3p,$$
(2) $$0 < Y < 9(6p)^2,$$

wo Y ungerade und wegen (2)

$$11 \equiv 2 + pY \pmod{18},$$

also $Y = 9Z$, wo Z ungerade.

Nach § 3 Satz II folgt nun eine Zerlegung

$$\begin{aligned} N &= (2b)^3 + 20(6p)^3 + 36p(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \\ &= (2b)^3 + (6p + x_1)^3 + (6p + x_2)^3 + (12p + x_3)^3 \\ &\quad + (6p - x_1)^3 + (6p - x_2)^3 + (12p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher die x_ν ganz sind und wegen (1), (2) kein Glied negativ ist.

Satz VII[38]. **Voraussetzung:** $N \equiv 16,\ 52$ *oder* $88 \pmod{108}$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K_7 \quad \text{für} \quad N \geqq N_0.$$

Beweis: Aus Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{8 \cdot 172}}$, $n_0 = 1$, $k = 18$, $l = 5, 11$; $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 172}{8 \cdot 151}} > 1$ folgt die Existenz einer Konstanten N_0 derart, daß es zu jedem $N \geqq N_0$ mindestens eine Primzahl $p \equiv 5 \pmod{18}$ und eine Primzahl $p \equiv 11 \pmod{18}$ gibt, für welche

$$124(2p)^3 + (6p)^3 \leqq N < 124(2p)^3 + 12 \cdot 2p(4p)^2.$$

Wenn $N \equiv 52, 88 \pmod{108}$, nehmen wir $p \equiv 5 \pmod{18}$, dann ist $124(2p)^3 \equiv 16 \pmod{108}$.

Wenn $N \equiv 16 \pmod{108}$, nehmen wir $p \equiv 11 \pmod{18}$, so daß $124(2p)^3 \equiv 52 \pmod{108}$.

Welcher der drei Restklassen N auch angehört, stets ist

$$\begin{aligned} N - 124(2p)^3 &= 12n, \\ n &\equiv 3 \text{ oder } 6 \pmod{9}, \\ 18p^3 \leqq n &< 2p(4p)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Nach Hilfssatz 1, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, gibt es ganze Zahlen a und X, so daß

$$n = 18a^3 + pX, \tag{2}$$

$$0 \leqq a < p, \tag{3}$$

$$0 < X < 2(4p)^2.$$

Aus (1) folgt, daß $X \equiv 3$ oder $6 \pmod{9}$.

Nach § 3 Satz V folgt nun eine Darstellung

$$\begin{aligned} N &= (6a)^3 + 124(2p)^3 + 12p(2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2) \\ &= (6a)^3 + (4p + x_1)^3 + (6p + x_2)^3 + (6p + x_3)^3 \\ &\quad + (4p - x_1)^3 + (6p - x_2)^3 + (6p - x_3)^3, \end{aligned}$$

in welcher die x_ν ganz sind und wegen (2), (3) kein Glied negativ ist.

---

38) Für $N \equiv 16, 160, 88 \pmod{216}$ ist die Behauptung schon in Satz I bewiesen.

Satz VIII. Voraussetzung: $N \equiv 12, 124, 156, 196, 228$ *oder* $268 \pmod{288}$.

Behauptung: *Es gibt eine Konstante* N_0, *so daß*

$$N = K, \quad \text{für} \quad N \geqq N_0.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 2 mit $x = \sqrt[3]{\frac{N}{8 \cdot 134}}$, $n_0 = 1$, $k = 24$, $l = 5, 11, 17$; $1 + \delta = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 134}{8 \cdot 113}} > 1$ gibt es eine Konstante N_0, so daß es zu jedem $N \geqq N_0$ je mindestens eine Primzahl $p \equiv 5, 11, 17 \pmod{24}$ gibt, für welche

$$86(2p)^3 + (6p)^3 \leqq N < 86(2p)^3 + 12p \cdot 2(4p)^2.$$

Wir nehmen nun

1) $l = 5$ für $N \equiv 124, 156 \pmod{288}$
2) $l = 11$ für $N \equiv 196, 228 \pmod{288}$
3) $l = 17$ für $N \equiv 12, 268 \pmod{288}$.

In allen Fällen ist dann

$$172p^3 \equiv 44 \pmod{72},$$
$$N - 86(2p)^3 = 4n,$$
$$n \equiv 1 \pmod{2},$$
$$2(3p)^3 \leqq n < 3p \cdot 2(4p)^2.$$

Nach Hilfssatz 1, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, gibt es ganze Zahlen a und X, so daß

$$n = 2a^3 + 3pX,$$
(1) $$0 \leqq a < 3p,$$
(2) $$0 < X < 2(4p)^2.$$

Insbesondere folgt

$$3pX \equiv n - 2a^3 \pmod{72},$$

wo $2a^3$ nur der Werte

$$0, 2, 16, 18, 34, 38, 54, 56, 70 \pmod{72}$$

fähig ist.

Da stets $3 \mid n - 2a^3$, kommen für jedes n nur 3 dieser Werte in Betracht.

11) $N \equiv 124 \pmod{288}$, $n \equiv 59 \pmod{72}$.

$3pX - 59 \equiv -2, -38$ oder $-56 \pmod{72}$,

$X \equiv 23, 11$ oder $5 \pmod{24}$.

12) $N \equiv 156 \pmod{288}$, $n \equiv 67 \pmod{72}$.

$3pX - 67 \equiv -16, -34, -70 \pmod{72}$,

$X \equiv 13, 7, 19 \pmod{24}$.

21) $N \equiv 196 \pmod{288}$, $n \equiv 5 \pmod{72}$.

$3pX - 5 \equiv -2, -38, -56 \pmod{72}$,

$X \equiv 11, 23, 5 \pmod{24}$.

22) $N \equiv 228 \pmod{288}$, $n \equiv 13 \pmod{72}$.

$3pX - 13 \equiv -16, -34, -70 \pmod{72}$,

$X \equiv 13, 19, 7 \pmod{24}$.

31) $N \equiv 12 \pmod{288}$, $n \equiv 31 \pmod{72}$.

$3pX - 31 \equiv -16, -34, -70 \pmod{72}$,

$X \equiv 13, 7, 19 \pmod{24}$.

32) $N \equiv 268 \pmod{288}$, $n \equiv 23 \pmod{72}$.

$3pX - 23 \equiv -2, -38, -56 \pmod{72}$,

$X \equiv 23, 11, 5 \pmod{24}$.

Welcher Fall auch eintreten möge, stets folgt nach § 3 Satz VI eine Darstellung

$$\begin{aligned} N &= (2a)^3 + 86(2p)^3 + 12p(2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2) \\ &= (2a)^3 + (4p + x_1)^3 + (4p + x_2)^3 + (6p + x_3)^3 \\ &\quad + (4p - x_1)^3 + (4p - x_2)^3 + (6p - x_3)^3 \end{aligned}$$

mit ganzzahligen x_ν, in welcher wegen (1) und (2) kein Glied negativ ist.

Das Ergebnis von Satz V läßt an Übersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig. Die zerstreuten Teilergebnisse der Untersuchung, die in den übrigen Sätzen dieses Paragraphen enthalten sind, sollen hier etwas übersichtlicher zusammengefaßt werden. Zunächst sind nach den Sätzen I, III, IV und VI von einer Stelle an, sämtliche

$$N \equiv 0, 8, 9, 16, 18, 20, 24, 27, 28, 32, 36, 40$$
$$44, 45, 48, 54, 56, 63, 64 \pmod{72}$$

in höchstens sieben positive Kuben zerlegbar.

Etwas mehr erhalten wir, nach Satz VIII, wenn wir die Zahlen nach Restklassen modulo 288 einteilen. Es lassen sich von

einer festen Stelle an in höchstens sieben positive Kuben zerlegen alle Zahlen, die folgenden 82 Restklassen modulo 288 angehören:

$$\begin{aligned} N \equiv\ & 0,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18,\ 20,\ 24,\ 27,\ 28,\\ & 32,\ 36,\ 40,\ 44,\ 45,\ 48,\ 54,\ 56,\ 63,\ 64,\\ & 72,\ 80,\ 81,\ 88,\ 90,\ 92,\ 96,\ 99,\ 100,\ 104,\\ & 108,\ 112,\ 116,\ 117,\ 120,\ 124,\ 126,\ 128,\ 135,\ 136,\\ & 144,\ 152,\ 153,\ 156,\ 160,\ 162,\ 164,\ 168,\ 171,\ 172,\\ & 176,\ 180,\ 184,\ 188,\ 189,\ 192,\ 196,\ 198,\ 200,\ 207,\\ & 208,\ 216,\ 224,\ 225,\ 228,\ 232,\ 234,\ 236,\ 240,\ 243,\\ & 244,\ 248,\ 252,\ 256,\ 260,\ 261,\ 264,\ 268,\ 270,\ 272,\\ & 279,\ 280. \end{aligned}$$

Legen wir den Modul 864 zu Grunde, um einen Vergleich mit dem Baerschen Ergebnis[39]) zu ermöglichen, so kommen zu den soeben aufgeführten Klassen nach Satz VII neu hinzu

$$N \equiv 52,\ 340,\ 628 \pmod{864},$$

und wir haben zusammen 249 Restklassen modulo 864. Von diesen finden sich 156 schon bei Herrn Baer, es sind also 93 Restklassen neu hinzugekommen. Satz V liefert einige Zerlegungen, die in den eben aufgezählten nicht enthalten sind; doch wäre es umständlich und unübersichtlich, 21600 oder eine noch größere Zahl als Modul zu wählen; auch wäre der Zuwachs nur gering.

Herr Baer konnte aus seinen Ergebnissen schließen[40]), daß zuletzt von je 8 konsekutiven Zahlen mindestens eine K_7 ist. Dies läßt sich ein wenig verschärfen, indem von je 7 konsekutiven Zahlen jedes Intervalls

$$72k+2 \leqq n \leqq 72k+70, \quad k \geqq k_0 \text{ ganz},$$

mindestens eine K_7 ist. Oder auch dahin, daß von je 4 konsekutiven Zahlen, die einem Intervall

$$72k+13 \leqq n \leqq 72k+59, \quad k \geqq k_0 \text{ ganz},$$

angehören, mindestens eine K_7 ist; insbesondere lassen sich alle Multipla von 4, welche einem solchen Intervall angehören, als Summen von sieben nicht-negativen Kuben darstellen.

---

39) A. a. O. S. 40/41.
40) A. a. O. S. 40.

Lebenslauf.

Ich, Johannes Gustav August Arndt, südafrikanischer Staatsangehöriger, wurde am 3. August 1896 als Sohn des Missionars Johannes Arndt zu Bloemfontein (Oranje Freistaat) geboren. Meine Schulbildung genoß ich in meiner Heimatstadt Bloemfontein, und bezog hernach das Grey Uniwersiteitskollege daselbst, wo ich Ende 1916 den Grad eines Baccalaureus Artium der Universität des Kap der Guten Hoffnung erwarb. In den Jahren 1917/18 beschäftigte ich mich hauptsächlich mit angewandter Mathematik unter Leitung des Dozenten Herrn N. Mudd M.A., der zugleich das Interesse für Fragen der reinen Mathematik bei mir erweckte. Ihm bin ich für seine Bemühungen um meine mathematische Ausbildung viel Dank schuldig. Später wurde ich sein Assistent und erwarb Anfang 1919 den Grad eines Magister Scientiae der Uniwersiteit van Suidafrika. Oktober 1919 bis Juni 1920 studierte ich Mathematik und Physik an der städtischen Universität in Amsterdam und seit Michaelis 1920 in Göttingen.

Ich habe an Vorlesungen und Übungen folgender Herren Professoren und Dozenten teilgenommen:

in Amsterdam: Brouwer, de Vries, v. d. Waals, Zeeman.

in Göttingen: Born, Courant, Gudden, Hartmann, Hilbert, König, Landau, Lietzmann, Pohl, Runge.

Allen meinen verehrten Lehrern bin ich für ihre Anleitung und ihr freundliches Entgegenkommen herzlich dankbar. Zu besonderem Dank bin ich Herrn Professor Landau verpflichtet für die vielen Anregungen, die mir in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie und Analysis zuteil wurden, insbesondere für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das wohlwollende Interesse, welches er ihr entgegenbrachte.

Lithomount
Pamphlet
Binder
GaylordBros.Inc.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.7AR6U C001
UBER DIE DARSTELLUNG GANZER ZAHLEN ALS S
3 0112 017065142